

Муниципальное общеобразовательное  
учреждение  
Петрозаводского округа  
«Средняя общеобразовательная школа №27 с  
углубленным изучением отдельных предметов»

**«Раскрашивание графика функции в такт мелодии»**

Выполнила: ученица 11Б класса

Мирошниченко Екатерина

Руководитель: Хвоина Светлана Александровна

Учитель математики

МОУ «Средняя школа №27», высшая категория

## Оглавление

Введение.....	3
Цель работы.....	4
Задачи работы.....	4
Объект исследования.....	4
Методы исследования.....	4
Практическая значимость.....	4
Основная часть.....	5
1. Выбор музыкального произведения.....	5
2. Разучивание и запись своей игры на видео.....	5
3. Определение диапазона используемых нот.....	5
4. Определение координат клавиш.....	5
5. Построение графика функции полинома.....	6
6. Преобразование полинома.....	8
7. Сглаживание графика преобразованной функции.....	9
8. Установка соотношения сторон графика.....	10
9. Получение графика для каждого такта.....	11
10. Работа в графическом редакторе GIMP. Раскрашивание графиков.....	11
11. Работа в GIMP. Создание кадров.....	12
12. Работа в видеоредакторе Kdenlive. Синхронизация вспомогательного видео.....	12
13. Работа в Kdenlive. Составление видео из кадров.....	12
14. Работа в Kdenlive. Расположение видео с моей игрой.....	12
15. Сборка видео.....	13
Заключение.....	14
Список литературы.....	15

## **Введение**

*«Музыка – математика чувств, а математика – музыка разума»*

*Джеймс Джозеф Сильвестр*

С давних пор до нас дошел афоризм, что математика и музыка – сестры. А казалось бы, что общего между наукой, пользующейся строгой логикой доказательств и музыкой – одним из прекраснейших видов искусства, произведения которых создаются в порыве вдохновения?

Пифагор один из самых первых установил связь между музыкой и математикой. Он создал учение о звуке, изучал философскую и математическую стороны звука, даже пытался связать музыку с астрономией. Используя особый инструмент – монохорд (прототип фортепиано), Пифагор изучал интервалы, открывал математические соотношения между отдельными звуками.

Математика и музыка — два предмета, два полюса человеческой культуры. Слушая музыку, мы попадаем в волшебный мир звуков. Решая задачи, погружаемся в строгое пространство чисел. И не задумываемся о том, что мир звуков и пространство чисел издавна соседствуют друг с другом.

Музыка — одно из моих любимых увлечений, и поэтому я решила сделать её темой своей работы.

С точки зрения физики музыка — это совокупность звуков различных частот. Между высотой звука и частотой существует прямо пропорциональная зависимость: чем выше частота, тем выше звук.

Аналогично цвет связан с частотой световых волн. Здесь также работает прямая пропорциональность: чем выше частота, тем цвет ближе к фиолетовому на спектре, и чем частота ниже, тем цвет ближе к красному.

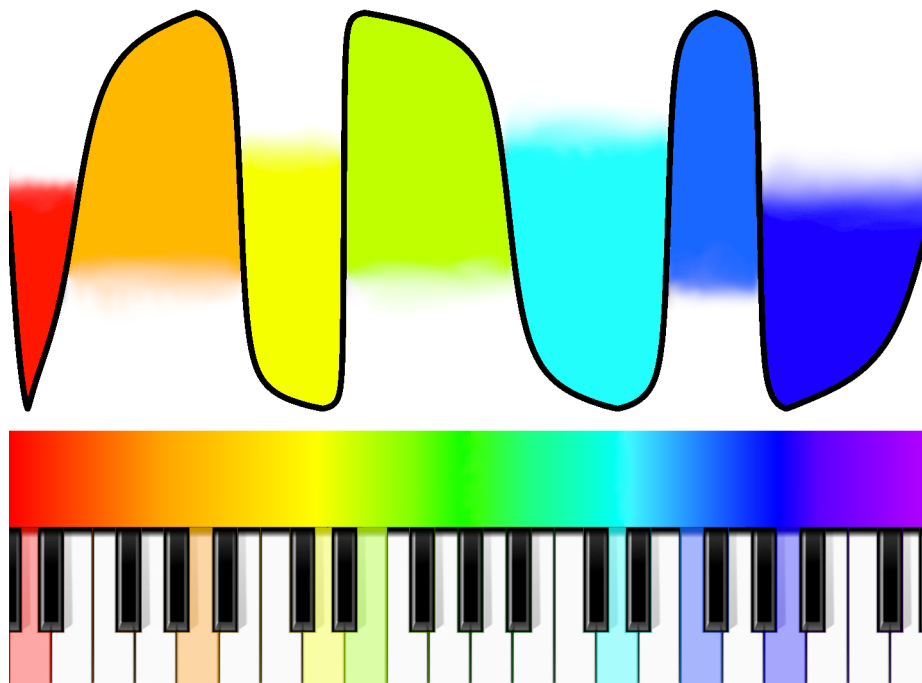
Цветомузыка — сопровождение музыкального произведения меняющимся цветовым освещением. Таким образом, цветомузыка связывает звуки и цвета.

Музыка может быть описана математически с помощью множества различных способов. Все они довольно сложные, однако во многих из них используется какая-либо математическая функция.

В своей работе я решила объединить цветомузыку и описание мелодии с помощью математической функции.

*Цель работы:*

Визуализация музыкального произведения при помощи цветных графиков. Пример графика приведён на рис. 1



*Рисунок 1: Пример раскрашенного графика функции*

*Задачи работы:*

1. Выбрать и разучить музыкальное произведение
2. Определить координаты клавиш
3. Построить и преобразовать график полинома
4. Создать кадры для видео в графическом редакторе
5. Смонтировать видеоролик

*Объект исследования:*

Музыкальное произведение «Can you feel the love tonight», автор Элтон Джон.

*Методы исследования:*

Анализ, синтез, визуализация, наблюдение, сравнение, измерение, эксперимент.

*Практическая значимость:*

Трёхминутный видеоролик, в котором в такт мелодии пики на графиках заливаются цветом.

## Основная часть

Каждое музыкальное произведение делится на равные по длительности такты. Я решила построить график для каждого такта так, чтобы максимумы и минимумы графика находились ровно над используемыми в данном такте клавишами синтезатора. В момент нажатия клавиши соответствующий ей пик заливается цветом из спектра, расположенного над клавишей.

### 1. Выбор музыкального произведения

Я выбрала песню «Can you feel the love tonight Элтона» Джона.

### 2. Разучивание и запись своей игры на видео

### 3. Определение диапазона используемых нот

Самая низкая нота — ре большой октавы, самая высокая — ре второй октавы.

### 4. Определение координат клавиш

Я сопоставила ноль началу клавиатуры, т. е. левому краю самой нижней используемой ноты, и направила ось  $x$  направо вдоль клавиатуры. Мне нужно было найти координату середины каждой клавиши в миллиметрах. Для этого с помощью линейки (рис. 2) я замерила начало и конец каждой клавиши, полученные результаты занесла в таблицу Excel и вычислила середины клавиш (таблица 1).



Рисунок 2: Измерение клавиатуры

Клавиша	Центр, мм	Клавиша	Центр, мм	Клавиша	Центр, мм	Клавиша	Центр, мм
03Б	11	12Б	127	09Ч	255	06Б	383
04Ч	25	01Б	150	10Б	267	07Ч	391
05Б	34	02Ч	160	11Ч	282	08Б	407
06Б	57	03Б	174	12Б	290	09Ч	418
07Ч	65	04Ч	188	01Б	313	10Б	430
08Б	80	05Б	197	02Ч	323	11Ч	445
09Ч	92	06Б	220	03Б	337	12Б	453
10Б	104	07Ч	228	04Ч	351	01Б	477
11Ч	119	08Б	244	05Б	360	02Ч	486
						03Б	500

Таблица 1: Координаты середин клавиш

Левый край самой левой клавиши — это ноль. Середины клавиш я назвала  $x_1, x_2, \dots, x_{37}$ . Правый край самой правой клавиши —  $x_n$  ( $x$  последний).

### 5. Построение графика функции полинома

Необходимо было связать координаты клавиш  $x_1, x_2, \dots, x_{37}$  с таким свойством функции, которым возможно управлять. Таким свойством являются, например, нули функции, т. е. точки пересечения графика с осью  $x$ .

Подходящей функцией является полином. Он имеет следующий вид:

$$p(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{37})$$

Тогда и только тогда, когда  $x$  равен координате клавиши, соответствующая скобка обращается в ноль, а следовательно, и вся функция обращается в ноль (если один из множителей равен нулю, то и всё произведение равно нулю).

Однако данный полином применяется сразу ко всем клавишам из диапазона, а в одном такте нажимается лишь несколько клавиш. Поэтому мне нужно было ввести ещё один набор переменных, которые принимают значение ЛОЖЬ или ИСТИНА для каждой клавиши в зависимости от того, используется ли она в данном такте. Я назвала эти переменные  $b_1, b_2, \dots, b_{37}$ . Формула для каждого множителя стала выглядеть так:

$$m_i = \begin{cases} x - x_i, & \text{если } b_i = \text{ИСТИНА} \\ 1, & \text{если } b_i = \text{ЛОЖЬ} \end{cases}$$

Таким образом, если клавиша используется в данном такте, то она учитывается в формуле. Иначе её множитель заменяется на единицу и не влияет на результат. После этого формула для полинома приняла следующий вид:

$$p_m(x) = m_1(x, x_1) m_2(x, x_2) \dots m_{37}(x, x_{37})$$

В Excel эта формула выглядит так, как показано на рис. 3.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
	Координата центра в мм (x <sub>1</sub> , x <sub>2</sub> ...)	Ноты, используемые в такте	Шаг (сетка для графика) (x)	Функция полином						
Клавиша										
03Б	11			0	-4,63314E+16					
04Ч	25			0,1	-4,61067E+16					
05Б	34	1		0,2	-4,58827E+16					
06Б	57			0,3	-4,56594E+16					
07Ч	65			0,4	-4,54367E+16					

Рисунок 3: Формула полинома в Excel. В этом такте была использована клавиша 05Б.

На рис. 4 синим цветом показан пример графика функции полинома  $p_m(x)$  (этот график послужил основой для графика на рис. 1). На этом графике нажатым клавишам соответствуют нули функции, а мне было необходимо, чтобы нажатым клавишам соответствовали пики (максимумы и минимумы). Я заметила, что график состоит из следующих повторяющихся фрагментов: ноль — возрастание — максимум — убывание — ноль — убывание — минимум — возрастание — ноль, и т. д. Я не доказывала это математически строго, но проверила вручную для каждого такта мелодии (т. е. поставила единицы в таблице с рис. 3 во всех встречающихся в мелодии комбинациях).

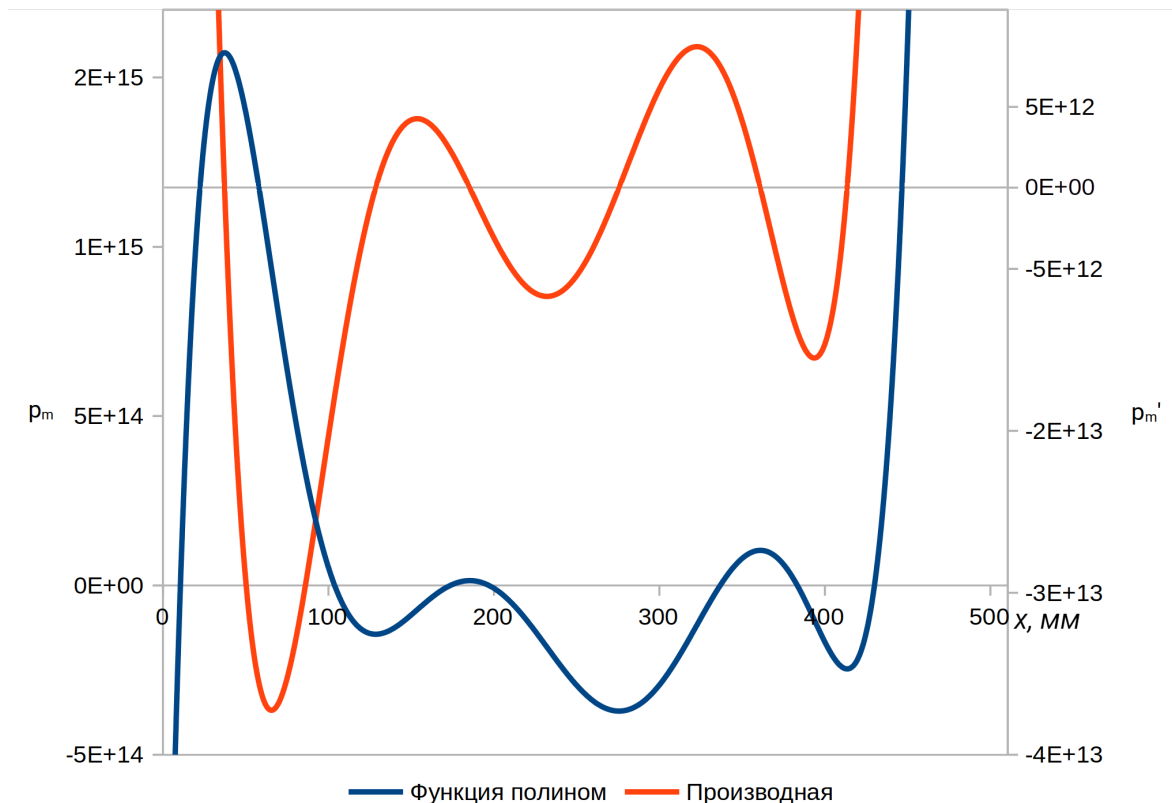


Рисунок 4: Полином и его производная

## 6. Преобразование полинома

Функцию необходимо было преобразовать так, чтобы этот паттерн сохранился, но пики превратились в нули и наоборот. Осуществить это могла помочь производная, т. к. она отражает максимумы и минимумы функции в виде нулей, а также показывает, возрастает или убывает график (таблица 2). Из  $p_m(x)$  и  $p'_m(x)$  нужно было получить новую функцию  $y(x)$  с заданными свойствами.

Участок	0		max		0		min		0
$p_m(x)$	0	+	+	+	0	-	-	-	0
$p'_m(x)$	+	+	0	-	-	-	0	+	+
$y(x)$	max		0		min		0		max

Таблица 2: Свойства преобразованной функции

Я решила, что знак производной должен отражать знак функции  $y(x)$ , а функция  $y(x)$  должна быть на пике там, где исходная функция была на нуле. Первому свойству удовлетворяет прямая пропорциональность, а второму — обратная, причём знак  $p_m(x)$  мне мешает, т. к. важно лишь то, возрастает ли или убывает функция. Поэтому вместо неё в преобразованную формулу в числитель я включила её производную, а в знаменатель — саму исходную функцию, но по модулю, чтобы знак не влиял на результат:

$$y(x) = \frac{p'_m(x)}{|p_m(x)|}$$

Эту функцию не всегда возможно вычислить в Excel, т. к. она может принимать очень большие значения и даже терпеть разрыв, когда знаменатель равен нулю. Поэтому при вычислении её в Excel пришлось использовать функцию ЕСЛИОШИБКА. В случае ошибки она заменяла результат вычислений на максимально или минимально возможное в Excel число.

Производную я вычислила по формуле  $\Delta p_m(x) / \Delta x$ .

Также я хотела добавить ещё по одному нулю функции  $y(x)$  в начале и в конце клавиатуры (на левом крае первой клавиши и на правом крае последней). Для этого я домножила  $y(x)$  на  $x$  и на  $x - x_n$ . Новую функцию я назвала  $y_1(x)$ :

$$y_1(x) = \frac{p'_m(x)}{|p_m(x)|} x(x - x_n)$$



Пример функции  $y_1(x)$  показан на рис. 5.

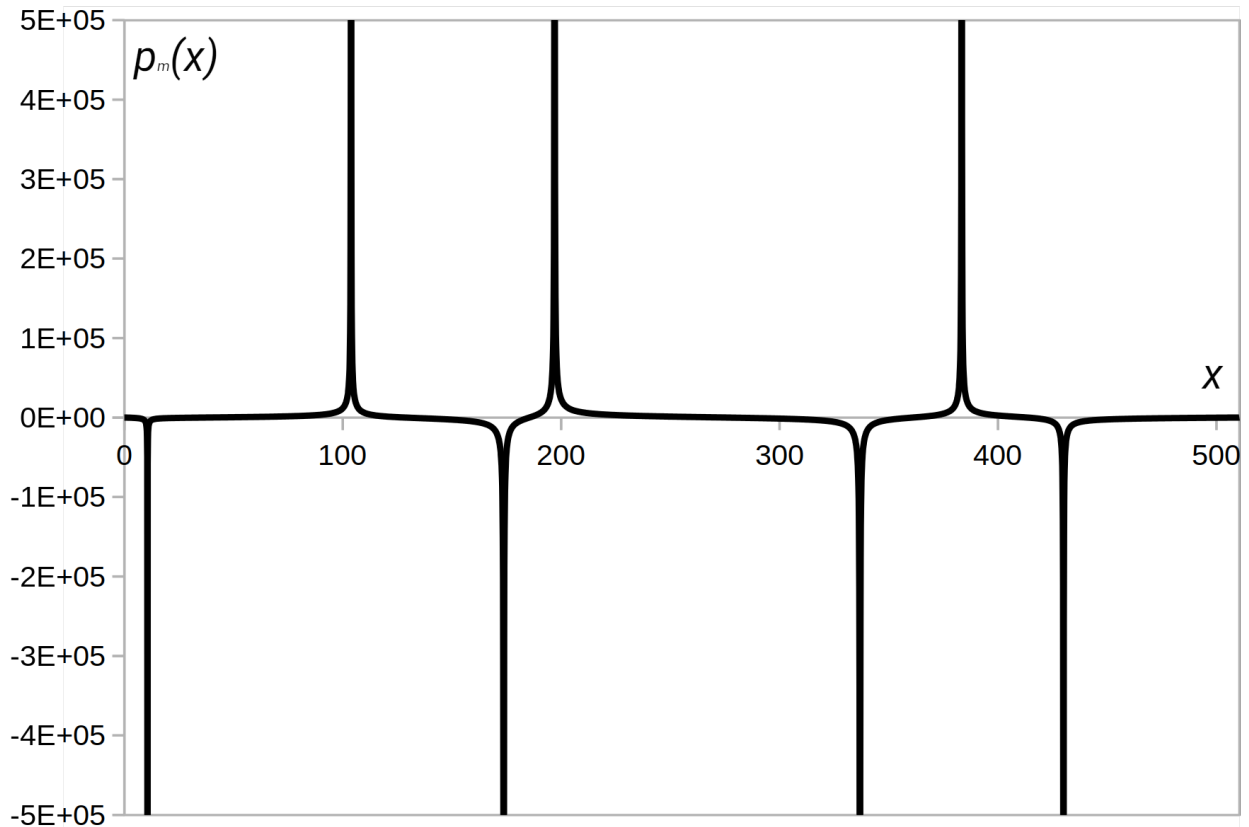


Рисунок 5: Пример преобразованной функции

### 7. Сглаживание графика преобразованной функции

Было видно, что график нуждался в сглаживании. Необходимо было избавиться от резких пиков. Для сглаживания я выбрала функцию арктангенса. Однако она не совсем подходила, потому что область значения  $y_1(x)$  была слишком большой, поэтому для большинства аргументов значения арктангенса оставались близки к одному и тому же числу ( $\pm \pi/2$ ). Хорошим выходом из ситуации было сделать так, чтобы половина точек находилась в диапазоне от -1 до 1, а вторая половина — за его пределами. Тогда половина точек принадлежала бы отрезку  $[-\pi/4; \pi/4]$ . Это также позволило бы сохранять вертикальный масштаб при добавлении новых пиков. Для этого мне понадобилась статистическая функция — медиана — такое число, что половина выборки чисел больше него, а половина — меньше. Я нашла медиану модуля  $y_1(x)$  и поделила на неё  $y_1(x)$ , получив новую функцию:

$$y_2(x) = \frac{y_1(x)}{\text{МЕДИАНА}(|y_1(x)|)}$$

Применив к  $y_2(x)$  арктангенс один раз, я подумала, что этого недостаточно, и решила поэкспериментировать с арктангенсом, применённым дважды. Я связала каждый арктангенс

с коэффициентом: при применении каждого арктангенса я домножала функцию на отдельный коэффициент, который регулировался с помощью ползунка в Excel (рис. 6).

Коэффициенты	Число для ползунка
0,3	120
16,8	840

Рисунок 6: Регулирование коэффициентов сглаживающей функции ползунками

Подвигав ползунки, я нашла наиболее эстетичный вариант сглаженной функции  $y_3(x)$ :

$$y_3(x) = \arctg(16,8 \cdot \arctg(0,3 \cdot y_2(x)))$$

На рис. 7 видно, как работает сглаживающая функция  $s(x) = \arctg(16,8 \cdot \arctg(0,3 \cdot x))$ .

Вблизи нуля она подобна прямой линии, а при отдалении постепенно упирается в  $\pm \pi/2$ .

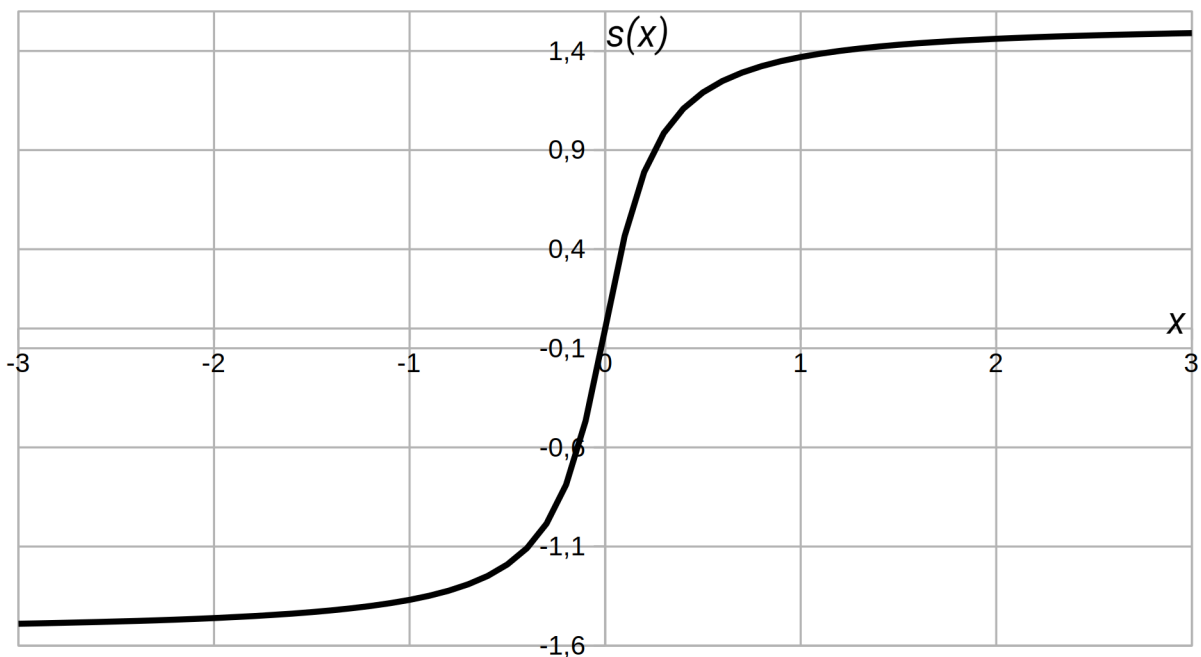


Рисунок 7: Сглаживающая функция

$y_3(x)$  — это окончательная формула для функции. Пример графика, построенного по этой формуле, можно увидеть на рис. 1.

#### 8. Установка соотношения сторон графика

Для кадров будущего видео я выбрала соотношение сторон 4:3 и разрешение 1440:1080 пикселей. В графическом редакторе GIMP я сделала макет кадра. Я расположила клавиатуру, спектр и график на кадре и определила соотношение сторон для области, в которой находился график. Это соотношение сторон я установила на графике в Excel.

## 9. Получение графика для каждого такта

В Excel я расставляла единицы в ячейки, соответствующие используемым нотам (определяла значение для переменных  $b_1, b_2, \dots, b_{37}$ ). Автоматически сгенерированный график я сохраняла в векторном формате (SVG). Это действие я повторила для каждого такта.

## 10. Работа в графическом редакторе GIMP. Раскрашивание графиков

Слои — это части компьютерного изображения, которые могут накладываться друг на друга и редактироваться отдельно.

Я хотела заливать каждую нажатую клавишу цветом из спектра выше. Инструмент «заливка» не позволял это сделать, т. к. клавиатура состояла из областей разных цветов (клавиши заливались не полностью, происходили утечки). Чтобы это исправить, я в отдельном слое нарисовала рамку, которая разделила клавиши. Файл со слоями с клавиатурой, спектром и рамкой я сохранила и использовала как шаблон для последующих графиков.

Далее мне нужно было для каждого такта раскрасить график. Алгоритм моей работы был следующий:

1. Сделать копию шаблона, переименовать её и открыть.
2. Вставить график в векторном формате в нужном ранее подобранном разрешении (87,5 точек/дюйм), которое позволяет масштабировать график так, чтобы он имел ширину ровно 1440 пикселей.
3. Расположить график в кадре.
4. Вынести линию графика в отдельный слой, в котором остальная часть прозрачная.
5. Удалить первоначальный слой с изображением графика.
6. Объединить слой с линией и слой с рамкой (на котором также прозрачный фон) в единый слой.
7. Сделать столько копий объединенного слоя, сколько пиков на графике (т. е. в итоге слоев с линией и рамкой становится на один больше, чем пиков). Верхний слой нужен, чтобы цвет на последнем закрашенном пике не перекрывал линию графика.
8. В самом нижнем из слоев графика залить первый пик цветом из спектра.
9. Инструментом «размытие» обработать край заливки.
10. Повторить пункты 8-9 в отдельных слоях для каждого пика.
11. Для инструмента «заливка» параметр «прозрачность» установить на значение 60.
12. Пройтись по всем слоям с залитыми пиками и залить соответствующие им клавиши тем же цветом.
13. Проверить правильность заливки, по очереди скрывая каждый из слоёв.
14. Полученное изображение сохранить.

В процессе работы я заметила, что многие графики повторяются, и с помощью программы DigiKam выявила дубликаты, что значительно сэкономило мне время.

### *11. Работа в GIMP. Создание кадров*

Необходимо было сделать отдельное изображение для каждого состояния клавиатуры, чтобы в итоге получилась последовательность кадров сразу в нужном порядке (чтобы не уделять этому внимание на следующем этапе), но пока с неопределенной длительностью.

Я скрывала слои с неиспользуемыми в данный момент такта нотами и полученное изображение экспортировала в формат PNG. В этом процессе важно было учесть несколько моментов:

1. В начале каждого такта на долю секунды должен был появляться:
  - а. Пустой график, если ноты из прошлого такта не продолжали звучать в новом такте или
  - б. График с одной или несколькими закрашенными нотами, которые продолжали звучать в новом такте.
2. Если во время такта одна или несколько нот нажимались два или более раз подряд, между нажатиями необходимо было сделать паузу с изображением этих нот пустыми, чтобы было отчётливо видно, что нажатия были отдельные.

### *12. Работа в видеоредакторе Kdenlive. Синхронизация вспомогательного видео*

На слух определять момент начала и окончания звучания очень долго, трудно и неточно. Поэтому я решила делать это с помощью экранного видео из программы, в которой я учусь играть. В этом видео по нотному стану перемещается полоска, проходя через ноты в моменты их нажатия.

Я вставила в видеоредактор экранное видео и видео со своей игрой, затем удалила аудиодорожку экранного видео, оставив только свою. После этого я стала передвигать экранное видео и своё друг относительно друга, пока не совпали моменты начала перемещения курсора и начала моей игры.

### *13. Работа в Kdenlive. Составление видео из кадров*

Я добавляла в рабочую корзину набор кадров для каждого такта. Затем, ориентируясь по экранному видео, я устанавливала курсор на тот момент, где начинался следующий после текущего кадр. В получившийся промежуток я перетаскивала кадр из корзины и растягивала до курсора. Таким образом кадр приобретал длительность, равную длительности звука. Я повторила это для каждого такта.

### *14. Работа в Kdenlive. Расположение видео с моей игрой*

Я решила, что наиболее выгодным местом для видео со мной был левый нижний угол экрана (поверх клавиатуры). Чтобы уменьшить видео и перенести его в угол, я воспользовалась эффектом «трансформация».

Однако есть моменты, когда клавиши на левой части клавиатуры задействуются. Получалось, что моё изображение загромождало закрашенные клавиши. Поэтому я вырезала некоторые участки дорожки видео с собой, и в нужные моменты левая часть клавиатуры освобождалась.

Также я вырезала несколько первых и последних секунд из дорожки с графиками и на это время сделала видео с собой на весь экран. Таким образом, во время игры моё изображение большую часть времени находится в левом нижнем углу экрана, а в начале и в конце показывается на весь экран.

Процесс работы в Kdenlive показан на рис. 8.

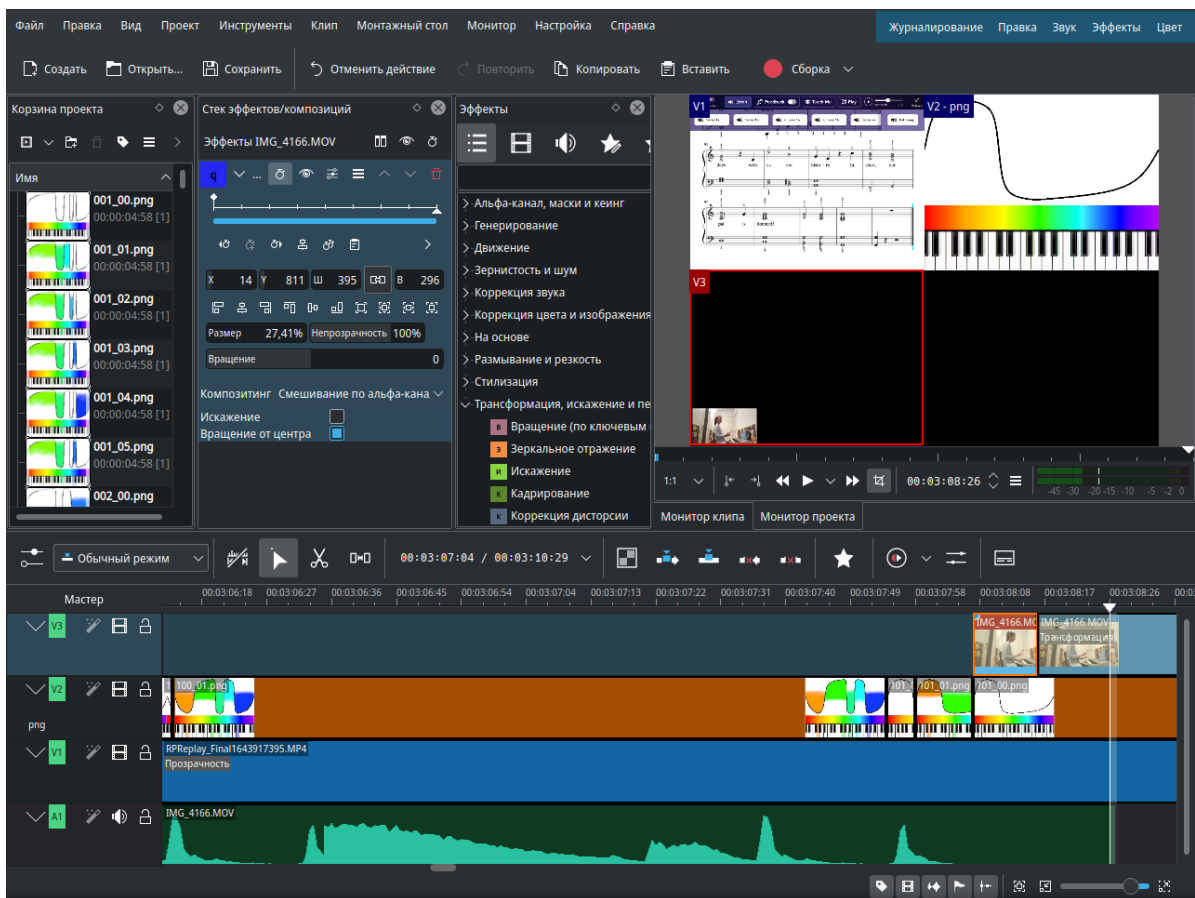


Рисунок 8: Работа в Kdenlive

## 15. Сборка видео

Я запустила сборку (рендер) проекта видео и получила видеофайл mp4, который можно воспроизвести в обычном проигрывателе.

Ссылка на видео: <http://file.karelia.ru/22rfj8/>

## **Заключение**

В своей работе я визуализировала музыкальное произведение, соединив применение математической функции и цветомузыку. Цветомузыка как программируемые синхронные автоматы на настоящий момент стала неотъемлемой составляющей во многих музыкальных проектах и шоу. Светомузыка как автоматические светомузыкальные устройства (АСМУ) относится к декоративно-оформительскому искусству и предназначена для светового сопровождения музыкального произведения, она позволяет по-новому воспринимать музыку, дополняя звуковое восприятие световыми эффектами.

Результатом работы стал трёхминутный видеоролик, в котором в такт мелодии пики на графиках заливаются цветом. Поставленные задачи выполнены, а цель достигнута.

Я приобрела навыки работы с графическим и видеоредактором, расширила свои знания о возможностях электронных таблиц, стала использовать больше функций текстового редактора.

Я обогатила знания о компьютерной графике, научилась работать с векторными и растровыми изображениями, преобразовывать одни в другие.

Благодаря выбору сложного для себя музыкального произведения я усовершенствовала свою технику игры на синтезаторе.

В области математики я узнала, как арктангенс может быть применён в качестве сглаживающей функции, научилась работать с производной и приблизительно считать её в Excel, научилась получать функцию с заданными свойствами, используя уже знакомые мне другие функции.

Также я получила опыт планирования многоэтапного проекта.

Работа будет полезна всем тем, кто заинтересован самостоятельным совершенствованием уровня владения цветомузыкой.

## Список литературы

1. А. Г. Мордкович, П.В. Семёнов «Алгебра и начала математического анализа» 10 класс, часть 1, глава 7 «Производная»
2. А. Г. Мордкович, П.В. Семёнов «Алгебра и начала математического анализа» 10 класс, часть 1, глава 3 «Тригонометрические функции», §21
3. [Статья в Википедии о медиане как статистической функции](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%B5%D0%B4%D0%B8%D0%B0%D0%BD%D0%B0_(%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D0%B8%D1%81%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B0))  
[https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%B5%D0%B4%D0%B8%D0%B0%D0%BD%D0%B0\\_\(%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D0%B8%D1%81%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B0\)](https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9C%D0%B5%D0%B4%D0%B8%D0%B0%D0%BD%D0%B0_(%D1%81%D1%82%D0%B0%D1%82%D0%B8%D1%81%D1%82%D0%B8%D0%BA%D0%B0))
4. [Справочник по работе с текстовым редактором LibreOffice Writer](https://help.libreoffice.org/latest/ru/text/scalc/guide/main.html)  
<https://help.libreoffice.org/latest/ru/text/scalc/guide/main.html>
5. [Справочник по работе с текстовым редактором Microsoft Word](https://support.microsoft.com/ru-ru/office/%D0%BE%D0%B1%D1%83%D1%87%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B5-%D1%80%D0%B0%D0%B1%D0%BE%D1%82%D0%B5-%D1%81-word-%D0%B4%D0%BB%D1%8F-windows-7bcd85e6-2c3d-4c3c-a2a5-5ed8847eae73)  
<https://support.microsoft.com/ru-ru/office/%D0%BE%D0%B1%D1%83%D1%87%D0%B5%D0%BD%D0%B8%D0%B5-%D1%80%D0%B0%D0%B1%D0%BE%D1%82%D0%B5-%D1%81-word-%D0%B4%D0%BB%D1%8F-windows-7bcd85e6-2c3d-4c3c-a2a5-5ed8847eae73>
6. [Справочник по работе с электронными таблицами LibreOffice Calc](https://help.libreoffice.org/latest/ru/text/scalc/guide/main.html)  
<https://help.libreoffice.org/latest/ru/text/scalc/guide/main.html>
7. [Справочник по работе с графическим редактором GIMP](https://docs.gimp.org/2.10/ru/)  
<https://docs.gimp.org/2.10/ru/>
8. [Справочник по работе с видеоредактором Kdenlive](https://userbase.kde.org/Kdenlive/Manual/ru)  
<https://userbase.kde.org/Kdenlive/Manual/ru>
9. [Обучающее приложение Simply Piano](https://apps.apple.com/ru/app/simply-piano-%D1%81%D0%BE%D0%B7%D0%B4%D0%B0%D0%BD%D0%BE-joytunes/id1019442026)  
<https://apps.apple.com/ru/app/simply-piano-%D1%81%D0%BE%D0%B7%D0%B4%D0%B0%D0%BD%D0%BE-joytunes/id1019442026>